Tanım: Bir V vektör uzayında

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$$

denklemini ~~sağlayan yalnız~~ yalnız

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

skalerleri sağlıyorsa $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir.

Tanım: Bir V vektör uzayında

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$$

denklemini sağlayan hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, \dots, c_n$ skalerleri varsa $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

Örnek: 1) $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \right\}$ vektörlerinin $\mathbb{R}^2$'de lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız.

$$c_1 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}c_1+c_2\\c_1+2c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1+c_2&=0 \\ c_1+2c_2&=0 \end{aligned} \Rightarrow c_1=c_2=0$$

$\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \right\}$ lineer bağımsızdır.

2) $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \right\}$ $\mathbb{R}^2$'de L.B.?

$$c_1 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}c_1+c_2+2c_3\\c_1+2c_2+3c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1+c_2+2c_3&=0 \\ c_1+2c_2+3c_3&=0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$c_2+c_3=0 \qquad c_3=\alpha\in\mathbb{R}$$
$$c_2=-\alpha$$

$$c_1+c_2+2c_3=0 \Rightarrow c_1=-\alpha$$

$\alpha=2$

$$-2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = 0$$

verilen vektörler lineer bağımlıdır.

3) $\mathbb{R}^3$'de $\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right\}$ lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız.

$$c_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1+c_2+c_3&=0 \\ c_2+c_3&=0 \\ c_3&=0 \end{aligned} \Rightarrow c_1=c_2=c_3=0$$

bu vektörler lineer bağımsızdır.

4) $\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\a\end{bmatrix} \right\}$ vektörlerinin lineer bağımsız olması için a ne olmalıdır.

$$c_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}1\\2\\a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1+c_2+c_3&=0 \\ c_2+2c_3&=0 \\ c_2+ac_3&=0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array}\right]$$

$$(a-2)\,c_3=0$$

$a\neq 2$ ise bu vektörler lineer bağımsızdır.

5) P_3'de $\{x^2-3x+4,\ x^2-2x+1,\ x+1\}$ vektörlerinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız.

$$c_1(x^2-3x+4)+c_2(x^2-2x+1)+c_3(x+1)=0$$
$$=0\cdot x^2+0x+0\cdot 1$$

$$(c_1+c_2)x^2+(-3c_1-2c_2+c_3)x+4c_1+c_2+c_3=0$$

$$\begin{aligned} c_1+c_2&=0 \\ -3c_1-2c_2+c_3&=0 \\ 4c_1+c_2+c_3&=0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$4c_3=0 \Rightarrow c_3=0$$
$$c_2+c_3=0 \Rightarrow c_2=0$$
$$c_1+c_2=0 \Rightarrow c_1=0$$

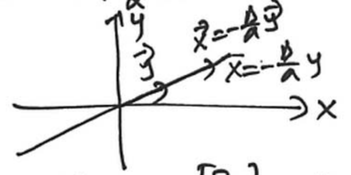
bu vektörler lineer bağımsızdır.

$\mathbb{R}^2$ de iki vektör lineer bağımlı ise

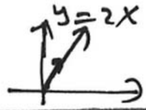
$$\alpha x + \beta y = 0$$

α veya β'dan en az biri sıfırdan farklıdır.

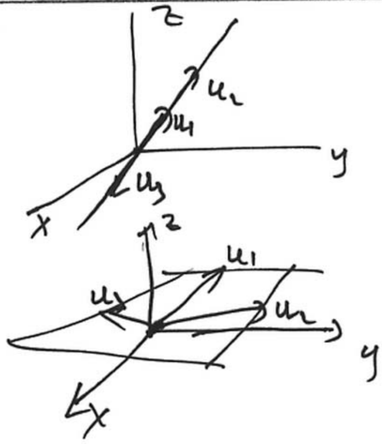
$\alpha \neq 0$ ise $x + \frac{\beta}{\alpha} y = 0 \Rightarrow \vec{x} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{y}$



$x = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ $\quad y = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$



$\mathbb{R}^3$'de



u_1
u_2
u_3

Teorem: $\mathbb{R}^n$'de $x_i = \begin{bmatrix}x_{1i}\\x_{2i}\\ \vdots \\x_{ni}\end{bmatrix}$ $\quad i=1,2,\ldots,n$

n tane vektör olsun. Eğer

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} \end{bmatrix}$$

ise $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektörlerinin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart X'in singüler olmasıdır (yani $|X|=0$ olmasıdır)

Örnek! $(2,2,3)^T$, $(1,3,1)^T$ ve $(1,-5,3)^T$ vektörleri $\mathbb{R}^3$'de lineer bağımlı mı?

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(14) - 2.2 + 3.(-8)$$

$$= 0$$

verilen vektörler lineer bağımlı

$\left(c_1 \begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}1\\-5\\3\end{bmatrix} = 0 \right)$

Teorem! $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bir V vektör uzayında vektörler olsun. Bir $v \in span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vektörünün $v_1, v_2, \ldots, v_n$'lerin lineer birleşimi olarak tek türlü yazılabilmesi için gerek ve yeter şart $v_1, v_2, \ldots, v_n$'lerin lineer bağımsız olmasıdır.

Tanım! $C^n[a,b]$ ile $[a,b]$ aralığında n. türevleri sürekli olan fonksiyonlar kümesini gösterelim.

$C^n[a,b]$ bir vektör uzayıdır. Ayrıca $C[a,b]$'nin öz alt uzayıdır.

$C^{(n-1)}[a,b]$'de $f_1, f_2, \ldots, f_n$ vektörlerinin lineer bağımlı veya bağımsız olmasını şöyle anlayabiliriz;

Eğer bu vektörler lineer bağımlı ise $\forall x \in [a,b]$ için

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

denklemini sağlayan hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ skalerleri vardır.

Eşitliğin her iki tarafının türevlerini alalım.

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

$$c_1 f_1'(x) + \cdots + c_n f_n'(x) = 0$$

$$c_1 f_1''(x) + \cdots + c_n f_n''(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$c_1 f_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n f_n^{(n-1)}(x) = 0$$

Her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

matris denkleminin aşikar olmayan çözümü $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\ \vdots \\c_n\end{bmatrix}$ ile aynıdır. Bu yüzden $f_1, \ldots, f_n$ $C^{(n-1)}[a,b]$'de lineer bağımlı ise $\forall x \in [a,b]$ için

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

dır.

Tanım: $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $C^{(n-1)}[a,b]$'nin elemanları olsun ve $[a,b]$ üzerinde $W[f_1,f_2,\ldots,f_n]$ fonksiyonunu

$$W[f_1,f_2,\ldots,f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

ile tanımlayalım. $W[f_1,f_2,\ldots,f_n]$ fonksiyonuna $f_1,f_2,\ldots,f_n$'in wronskiyanı denir.

Teorem: $f_1,f_2,\ldots,f_n \in C^{(n-1)}[a,b]$ olsun. Eğer $W[f_1,f_2,\ldots,f_n](x_0) \neq 0$ olacak şekilde $x_0 \in [a,b]$ varsa $f_1,f_2,\ldots,f_n$ lineer bağımsızdır.

$f_1,f_2,\ldots,f_n$'ler $C^{(n-1)}[a,b]$ lineer bağımsız ise $C[a,b]$'de de lineer bağımsızdır.

Örk: 1) e^x, e^{-x} $C[-3,3]$

e^x, e^{-x} $C'[-3,3]$

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

e^x, e^{-x} $C[-3,3]$'de lineer bağımsızdır

$$\left(C'[-3,3] \qquad W[e^x,e^{-x}] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} \right)$$

2) x^2, $x|x|$ $\qquad x^2, x|x| \in C'[-1,1]$

$$\begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} \equiv 0$$

$$c_1 x^2 + c_2 x|x| = 0$$

$x=1 \qquad c_1 + c_2 = 0$

$x=-1 \qquad c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

$x^2, x|x|$ lineer bağımsızdır.

3) $1, x, x^2$ nin P_3'de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$1, x, x^2$ P_3'de lineer bağımsız

$$c_1 1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0.$$

BAZ ve BOYUT

Tanım: Bir V vektör uzayında aşağıdaki şartları sağlayan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörlerine V vektör uzayı için bir bazdır (taban) denir.

1) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ lineer bağımsız

2) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ V'yi gerer

Örk: 1) $\mathbb{R}^3$'de $\{e_1, e_2, e_3\}$ baz olduğunu gö.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = 0$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

e_1, e_2, e_3 lineer bağımsız.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a e_1 + b e_2 + c e_3$$

e_1, e_2, e_3 V'yi gerer ($\mathbb{R}^3$)

$\{e_1, e_2, e_3\}$ standart (doğal) baz denir

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ lineer bağımsız.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ \beta + \gamma \\ \gamma \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \beta + \gamma = b \\ \alpha + \beta + \gamma = a \end{matrix}$$

$\gamma = c$

$\beta = b - c$

$\alpha = a - b$

bu vektörler $\mathbb{R}^3$'ü gerer dolayısıyla

bu // bazdır.

2) $\mathbb{R}^{2\times 2}$'de $\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{22}} \right\}$ baz olduğunu gösterin.

$$c_1 E_{11} + c_2 E_{12} + c_3 E_{21} + c_4 E_{22} = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ lineer bağımsız.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a E_{11} + b E_{12} + c E_{21} + d E_{22}$$

$\mathbb{R}^{2\times 2}$ yi gerer o halde bazdır.

151

3) P_3'de $\{1, x, x^2\}$'nin baz old. gös. lineer bağımsız old. gösterilmişti

$ax^2+bx+c \in P_3$

$ax^2+bx+c = \alpha 1 + \beta x + \gamma x^2$

$\alpha = c \quad \beta = b \quad \gamma = a$

bu vektörler P_3'ü gerer

$\{1, x, x^2\}$ P_3'ün bir bazıdır.

bu baza doğal (standart) baz.

152

Genel olarak $\mathbb{R}^n$'nin doğal (standart) bazı $e_1, e_2, \dots, e_n$ dir. P_n'nin doğal bazı $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ dir.

Teorem: Bir V vektör uzayı için $S\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ germe kümesi ise V'deki herhangi m vektör $m>n$ ise lineer bağımlıdır.

Sonuç: Eğer $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ bir V vektör uzayının iki bazı ise $m=n$ dir.

153

Tanım: V bir vektör uzayı olsun. V'nin bir bazı n tane vektör içeriyorsa V'nin <u>boyutu</u> n'dir denir. V'nin sıfır alt uzayının boyutuna 0'dır denir. Eğer V vektör uzayı sonlu vektör kümesi ile geriliyorsa <u>sonlu boyutlu</u> diğer durumda <u>sonsuz boyutlu</u> denir.

Teorem: Eğer V boyutu sıfırdan büyük bir vektör uzayı ise

i) lineer bağımsız herhangi n vektör V'yi gerer

154

ii) V'yi geren herhangi n vektör lineer bağımsızdır.

<u>Örn:</u> 1) $\mathbb{R}^3$ $\{e_1, e_2, e_3\}$ boyutu 3'tür.

2) R^{2x2} boyutu 4'tür

3) P_3'ün boyutu 3'tür

Genel olarak $\mathbb{R}^n$'nin boyutu n, $R^{m\times n}$'nin boyutu $m\times n$, P_n'nin boyutu n dir.

155

Teorem: Eğer V, boyutu sıfırdan büyük bir vektör uzayı ise

i) Elemanların sayısı n'den küçük vektör kümesi V'yi geremez.

ii) Elemanların sayısı n'den küçük lineer bağımsız vektörlerin kümesi V'nin bir bazı olması için genişletilebilir.

ii) Elemanların sayısı n'den büyük vektörler kümesi lineer bağımsız olamaz.

156